
La Demanda Cognitiva como Oportunidad de Aprendizaje en el Área de Matemática



Gustavo Cruz Ampuero

gacruz@colegiosperuanos.edu.pe

“Cuando se piensa en formar ciudadanos críticos, que puedan participar activamente en una sociedad democrática, hace falta anticipar qué tipo de retos afrontarán nuestros estudiantes a futuro y, en consecuencia, qué herramientas debería brindarles la escuela.”



*APORTES PARA LA ENSEÑANZA DE
LA MATEMÁTICA LLECE, 2009*

Esquema

1. Introducción
2. La Oportunidad de Aprendizaje (ODA)
3. La Demanda Cognitiva
 - 3.1 Propuesta de Stein
 - 3.2 Propuesta de PISA
4. Hallazgos y necesidad de inclusión de la demanda cognitiva en el bagaje profesional del docente del área de matemática en el Perú

Introducción



Los sistemas educativos que consiguen mejores resultados en sus estudiantes vienen trabajando el área de matemática de una manera muy distinta a la tradicional y que aún persiste en nuestro país.



Así, se tienen propuestas como las del NCTM (el enfoque centrado en la resolución de problemas), la de la prueba PISA (enfoque fenomenológico de Freudenthal), entre otros.



Introducción



Estas propuestas presentan como denominador común:

- El entendimiento de la educación matemática de una manera más compleja, más allá de simplemente los contenidos.
- Toman el concepto de proceso cognitivo (con diferentes nombres).
- Consideran la importancia de la relevancia de las situaciones propuestas a los estudiantes.
- Incorporan una diferente concepción de matemática a la tradicionalmente usada en nuestro país.



Introducción



En particular, toman a la matemática como una ciencia en permanente cambio y expansión. Y no como un producto acabado.



Entienden a la educación matemática como una propuesta para que los estudiantes desarrollen competencias, donde incluyen formas de pensar y el desempeño en situaciones reales.



Asimismo, en sus bases se identifica una manera de entender al aprendizaje como un proceso complejo en el que el estudiante (o el grupo de estudiantes) tiene un rol activo.



Introducción

La presente propuesta se formula desde lo que Skemp llama “*matemática relacional*”:

- una matemática que privilegia los procesos de pensamiento para que el estudiante pueda “apropiarse” de ellos y paulatinamente usarlos en las vastas y muy variadas situaciones que le demanda el mundo actual.

Se contrapone a la concepción “tradicional” de la matemática (*matemática instrumental*):

- Que considera a la matemática como un conjunto ordenado de conocimientos que el estudiante debe “aprender” para emplearlos en las situaciones ad hoc que se le plantean en la clase.

Introducción

El entendimiento de lo que es un Problema en matemática, también es diferente:

- Por un lado, se “concibe el problema matemático como una tarea que busca una solución, la que es obtenida a través de la aplicación de algoritmos simples, conocidos y ejercitados en múltiples tareas similares”. (Ponce)
- Por el otro, se los entiende “como tareas fundamentalmente problematizadoras, que provee a los estudiantes la oportunidad de transitar por múltiples caminos y tipos de pensamiento para el desarrollo de ellos (Stein).

2



LA OPORTUNIDAD DE APRENDIZAJE (ODA)

La Oportunidad de Aprendizaje (ODA)



Los estudios realizados en el TIMSS (1996) la presentan como un factor importante a considerar para conocer la calidad de un sistema educativo.

- Calidad Educativa: la medida en la que la totalidad de estudiantes alcanzan las metas de aprendizaje propuestas.



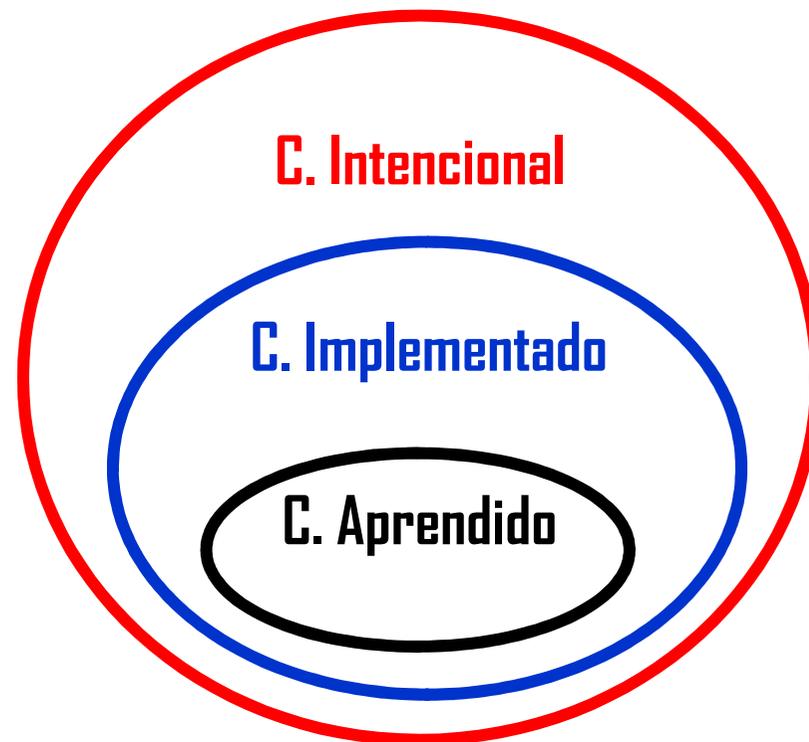
La ODA, entonces, puede ser entendida como el conjunto de situaciones de aprendizaje a las que ha tenido acceso el estudiante.



Diferentes niveles del Currículo



Para presentar el modelo, se apela a la definición de tres tipos de currículo:



Componentes de la ODA



Actualmente, a la ODA se le reconocen factores considerados como importantes en diversos estudios, tales como:

- **La cobertura curricular:** “se refiere al grado en que los docentes desarrollan las competencias, capacidades y contenidos de la estructura curricular.”
- **La demanda cognitiva:** “Nivel de complejidad que demanda una tarea a partir del tipo de habilidad cognitiva que se exige al estudiante.”



3



LA DEMANDA COGNITIVA

La Demanda Cognitiva

Tarea: cada una de las actividades que se le proponen al estudiante dentro del desarrollo del área. No se refiere en específico a las “tareas para la casa” ni a las “tareas para el cuaderno”, aunque quedan incluidas.



Se entiende la demanda cognitiva como la caracterización que se hace de las tareas que se proponen al estudiante, según la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en la resolución de dicha tarea.



Es la clasificación de las tareas según los procesos intelectuales que debe emplear el estudiante para resolverla.



3.1 Clasificación de Stein

Tareas de **Alta**
demanda cognitiva

Tareas de baja
demanda cognitiva



Las tareas de baja demanda cognitiva



Se subdividen en:



Procedimientos
sin conexiones



Tareas de
memorización

Ejemplos de tareas de baja demanda cognitiva

Tareas de memorización

 Halla: $\sqrt{2}$

 ¿Cómo se llama, según su número de términos, un polinomio completo de segundo grado?

 Dos magnitudes pueden ser directa o
proporcionales.

 ¿Qué es un número primo?

 (oralmente) $8 \times 4 =$

 ¿Qué es el perímetro?

 ¿Cuánto suma la medida de los ángulos de un triángulo?

Las tareas de baja demanda cognitiva

Tareas de memorización

-  Reproducción de datos, reglas, fórmulas o definiciones previamente aprendidas.
-  No pueden ser resueltas utilizando procedimientos pues el procedimiento no existe o el tiempo es demasiado corto.
-  No son ambiguas: tareas que incluyen una reproducción exacta de material visto previamente y que es reproducido clara y directamente según el enunciado.
-  No tienen conexiones con conceptos o significados subyacentes a los datos, reglas, fórmulas o definiciones aprendidos o evocados.

Ejemplos de tareas de baja demanda cognitiva

Procedimientos sin conexiones

- Halla la generatriz de: **0,33...**
- Escribe 407 en el tablero posicional
- Efectúa:

$$(2x - 3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

$$(4a^2 - 2b)^2 = 16a^4 - 16a^2b + 4b^2$$

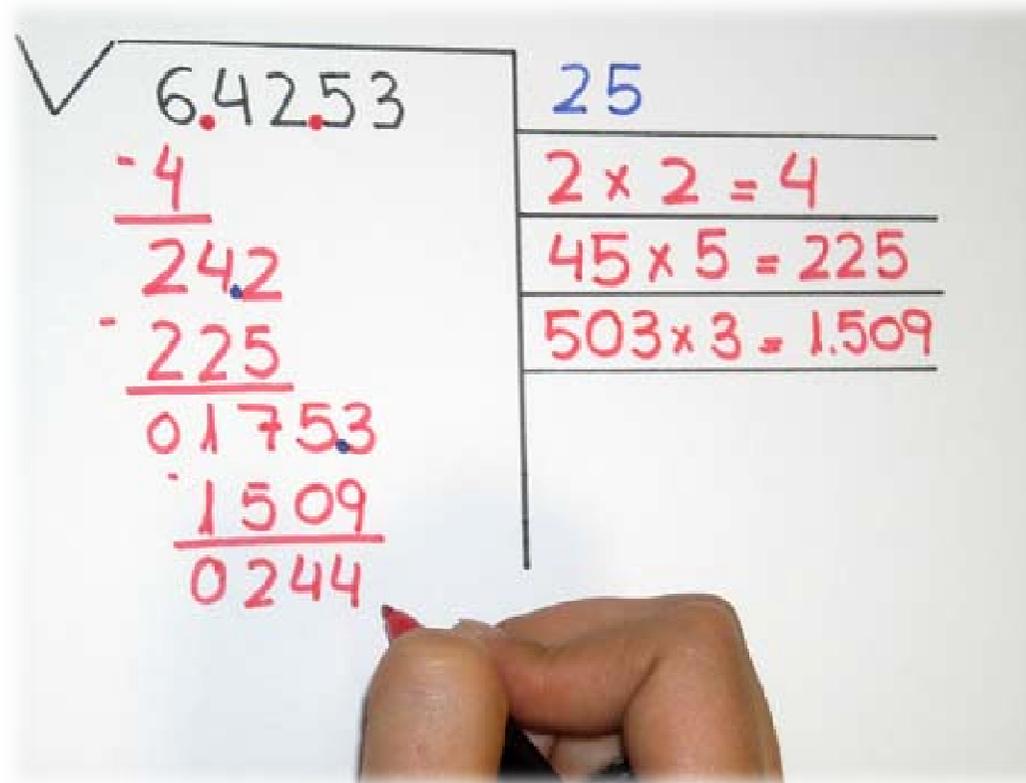
- Calcula el promedio de: 7; 12 y 8
- Resuelve: $23 + 8 + 398$.
- Halla el cociente de:

$$\begin{array}{r} 8x^3 - 4x^2 + 2x + 7 \\ -8x^3 - 4x^2 + 4x \\ \hline -8x^2 + 6x + 7 \\ + 8x^2 + 4x - 4 \\ \hline 10x + 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x^2 + x - 1 \\ \hline 4x - 4 \end{array}$$

Ejemplos de tareas de baja demanda cognitiva

Procedimientos sin conexiones

Dificultad



Complejidad

Las tareas de baja demanda cognitiva

Procedimientos sin conexiones



Son algoritmos cuyo uso es requerido por la tarea o basado en aprendizajes previos, experiencias o dado por la tarea.



Existe una pequeña ambigüedad acerca de lo que se requiere hacer y sobre cómo hacerlo.



No tienen conexión con conceptos o significados subyacentes a los procedimientos usados.



Centrados en obtener una respuesta correcta más que en desarrollar la comprensión de las nociones involucradas.



Requieren explicaciones que se enfocan únicamente en descubrir el proceso usado.

En general, las tareas de baja demanda cognitiva



Constituidas tanto por la memorización de información, como por la ejecución de los llamados procedimientos sin conexiones.



Son las tareas rutinarias que se aprenden por repetición.



Para su ejecución no es necesaria la comprensión de las nociones involucradas, ni las razones, contextos o límites de su uso.



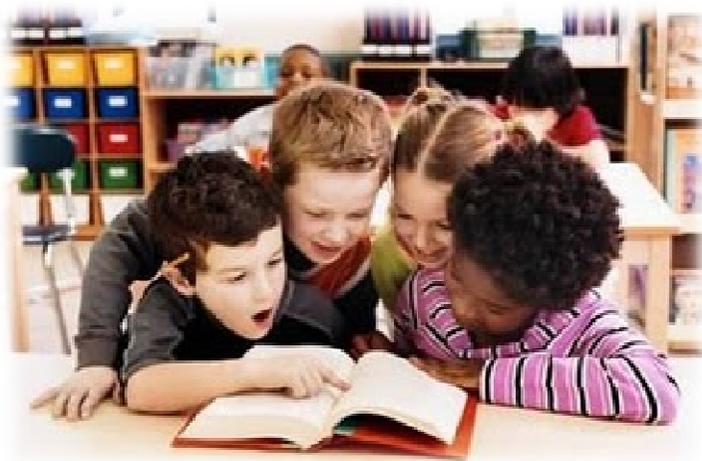
Solo es necesario “aprender el procedimiento” para ejecutarlas.

Tareas de Alta demanda cognitiva

Hacer matemática



Procedimientos con conexiones



Ejemplos de tareas de alta demanda cognitiva

Procedimientos con conexiones

 Pinta de amarillo los números, según la secuencia:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

 ¿Qué observas? ¿Hay alguna regularidad en los números pintados?

 ¿Qué números han sido pintados?

 ¿Qué números han sido dejados sin pintar?

Ejemplos de tareas de alta demanda cognitiva

Procedimientos con conexiones



Pinta de rojo los números, según la secuencia:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60



¿Qué observas? ¿Hay alguna regularidad en los números pintados?



¿Qué números han sido pintados?



Fíjate en las cifras de los números de cada **diagonal**...



Ejemplos de tareas de alta demanda cognitiva

Procedimientos con conexiones



Enfocan la atención en el uso de procedimientos destinados a desarrollar niveles más profundos de comprensión de conceptos e ideas matemáticas.

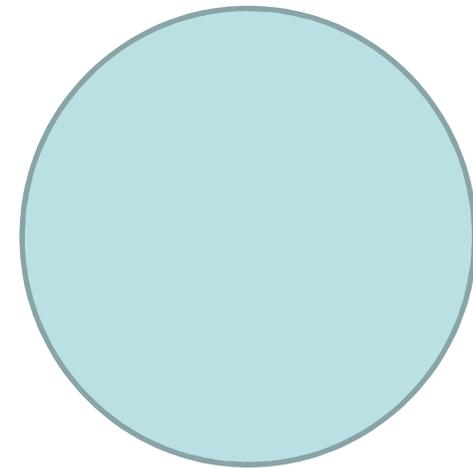


Sugieren vías que constituyen una extensión de procedimientos generales con conexiones cercanas a ideas conceptuales subyacentes.



La siguiente figura representa los $\frac{5}{4}$ de la unidad. ¿Cuál es la unidad?

(Penalva, 2011)



Las tareas de alta demanda cognitiva

Procedimientos con conexiones

 Se representan de múltiples formas (por ejemplo: diagramas visuales, manipulativos, símbolos, situaciones problemáticas).

 A pesar de que se sigan procesos generales, no pueden ser resueltos descuidadamente.

 Se necesita conectar las ideas conceptuales que subyacen a los procedimientos, a fin de completar exitosamente la tarea y desarrollar su comprensión.

El equipo de básquet está conformado por:

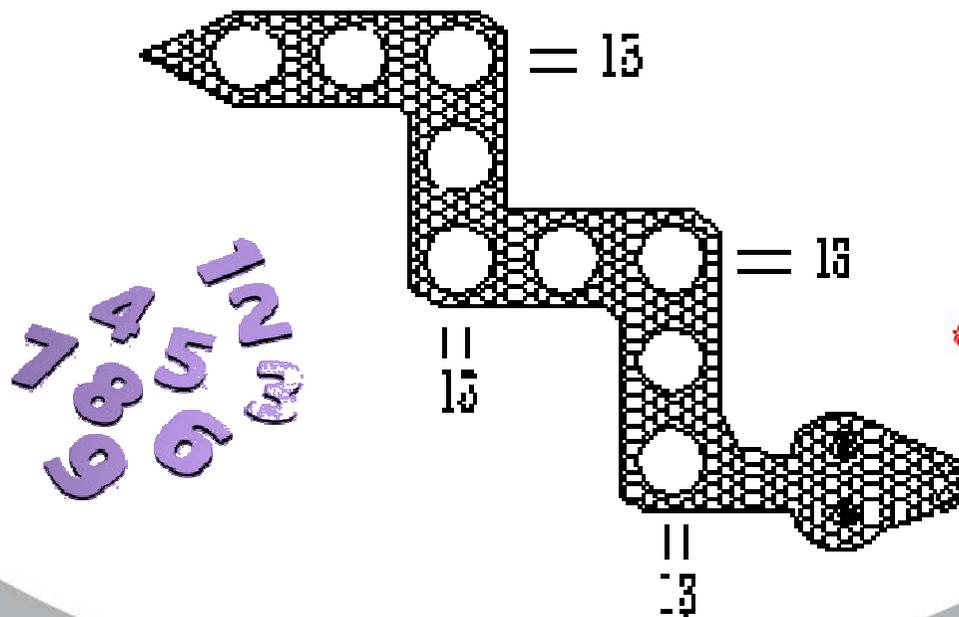
Nombre	Estatura (cm)
Pancho	180
Daniela	165
César	150
Martha	170
Rosa	155

Hoy, Carlos (170 cm) se integra al equipo. ¿Su inclusión aumentará o disminuirá la estatura promedio del equipo? ¿Por qué?

Ejemplos de tareas de alta demanda cognitiva

“Hacer matemática”

 Coloca los números mostrados en la serpiente, de manera que cada tres sumen 13.



Juntando por sus extremos tres palitos de madera, se puede formar un triángulo:

- Siempre
- A veces
- Nunca



Justifica tu respuesta.

Ejemplos de tareas de alta demanda cognitiva

“Hacer matemática”



Sombrea 6 cuadrados pequeños en un rectángulo de 4×10 . Usando el rectángulo, explica cómo se determina cada una de las siguientes preguntas:

- a) El porcentaje del área sombreada.
- b) La expresión decimal del área sombreada.
- c) La fracción que representa el área sombreada

(Cueto , 2003. Pág. 63)

Las tareas de alta demanda cognitiva

“Hacer matemática”

 Requieren un pensamiento complejo y no algorítmico (no existe una vía predecible, una aproximación bien realizada, una vía dada por la tarea, la instrucción o un ejemplo trabajado).

 Llevan a explorar y entender la naturaleza de los conceptos, procedimientos o relaciones matemáticas.

 Demandan monitoreo y autorregulación de los procesos cognitivos.

 Llevan a conocimientos y experiencias relevantes, y a hacer un uso adecuado de ellos a través de la tarea.

 Requieren que se analice la tarea y examine para delimitar las posibles estrategias de solución.

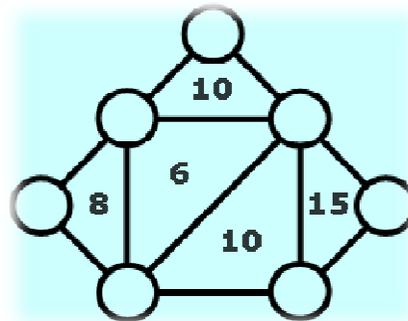
 Pueden involucrar cierto nivel de ansiedad para el estudiante, debido a la naturaleza impredecible del proceso de solución que se necesita.

3.2 Clasificación de PISA: Grupos de competencia

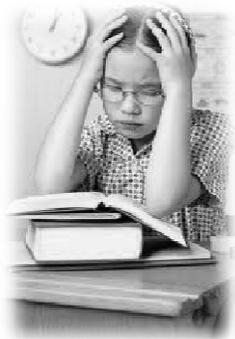
Reflexión



Conexiones



Reproducción



Ejemplo del grupo Reproducción



Calcula: $5 + 3 \times 7$



Resuelve la ecuación: $7x - 3 = 13x + 15$



Halla el promedio de: 7; 12; 8; 14; 15; 9.



Escribe 69% como una fracción.



Si se depositan S/. 1 000 en una cuenta de ahorros de un banco, a una tasa de interés del 4%. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta después de un año?

Reproducción



Está referido tanto a la memorización como a la evocación de información (datos, hechos, terminología).



La repetición de ejecuciones.



Actividades rutinarias, en las que el estudiante no debe hacer ninguna adaptación al contenido involucrado.



Procedimientos sin contexto y sin conexiones, “tal y como fueron enseñados”.



Aprendizajes que no implican la posibilidad de ser adaptados o transferidos.

Ejemplos del grupo Conexiones



María vive a dos kilómetros del centro educativo y Martín a cinco. ¿A qué distancia viven uno del otro? (PISA)



Una pizzería sirve dos tipos de pizza del mismo grosor pero de distinto tamaño. La más pequeña tiene un diámetro de 30 cm, y cuesta 30 soles. La más grande tiene un diámetro de 40 cm, y cuesta 40 soles. ¿Cuál de las pizzas cuesta menos? ¿Por qué? (PISA)



En el salón 9 niños llevaron chompa y 11 trajeron su tarea. Si hay 14 en el salón, ¿es esto posible? Explica.

Conexiones



Situaciones en las que se debe hacer ligeras adaptaciones o establecer alguna relación del contenido aprendido, con otros aprendizajes.



Se presentan en un contexto algo distinto al contexto en el que se aprendió.



Aplicar definiciones, clasificar, identificar elementos o características, problemas rutinarios que demandan establecer ciertas relaciones entre el contenido involucrado.

Ejemplos del grupo Reflexión

En cierto país, el presupuesto nacional de defensa es de \$30 millones para 1980. El presupuesto total de ese año es de \$500 millones. El siguiente año, el presupuesto de defensa es de \$35 millones, mientras que el presupuesto total es de \$605 millones. La inflación durante el periodo cubierto por los dos presupuestos asciende al 10 por ciento.

- Ha sido invitado a dar una conferencia para una sociedad pacifista. Usted trata de explicar que el presupuesto de defensa disminuyó durante este periodo. Explique cómo haría esto.
- Ha sido invitado a dar una conferencia para una academia militar. Usted trata de explicar que el presupuesto de defensa aumentó durante este periodo. Explique cómo haría esto.

(PISA)

Reflexión



Referidas a situaciones novedosas y/o complejas en las que se debe producir una transformación o nuevas relaciones de lo aprendido.



Por lo general, se presentan en un contexto a partir del cual el estudiante debe seleccionar la información relevante y trabajar estableciendo nuevas relaciones entre los conceptos o sus representaciones.



Resolver problemas novedosos y complejos, evaluar, proponer alternativas, producir un nuevo objeto, sintetizar, definir, justificar.

4

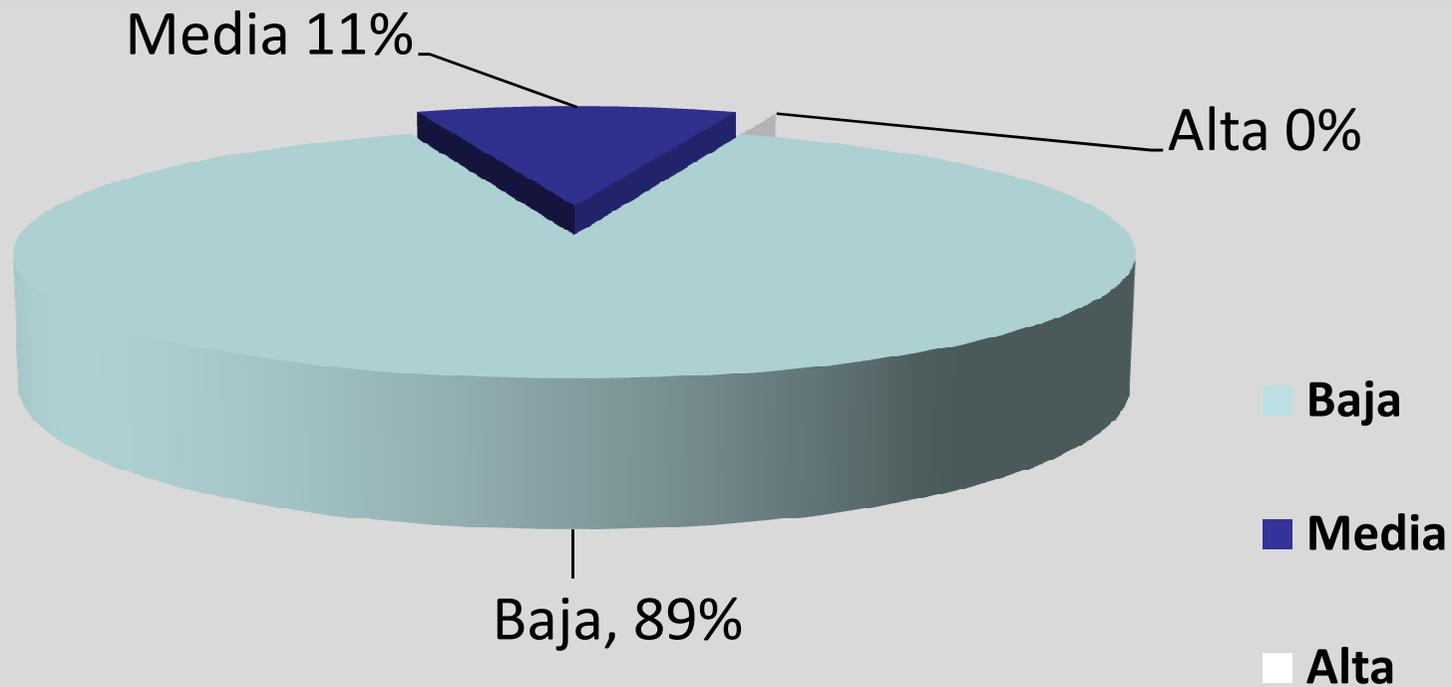


HALLAZGOS Y NECESIDAD DE INCLUSIÓN DE LA DEMANDA COGNITIVA EN EL BAGAJE PROFESIONAL DEL DOCENTE DEL ÁREA DE MATEMÁTICA EN EL PERÚ

Resultados de algunos estudios (Cueto, 2003)

Empleando las categorías de Stein		Cuadernos de trabajo		Cuadernos de los estudiantes	
Baja demanda cognitiva	Memorización	24%	92%	23%	99%
	Procedimientos sin conexiones	67%		76%	
Alta demanda cognitiva	Procedimientos con conexiones	8%	8%	1%	1%
	“Haciendo matemática”	0%		0%	
Total		(786) 100%		(715) 100%	

Resultados de algunos estudios (Cuglievan et al, 2006)

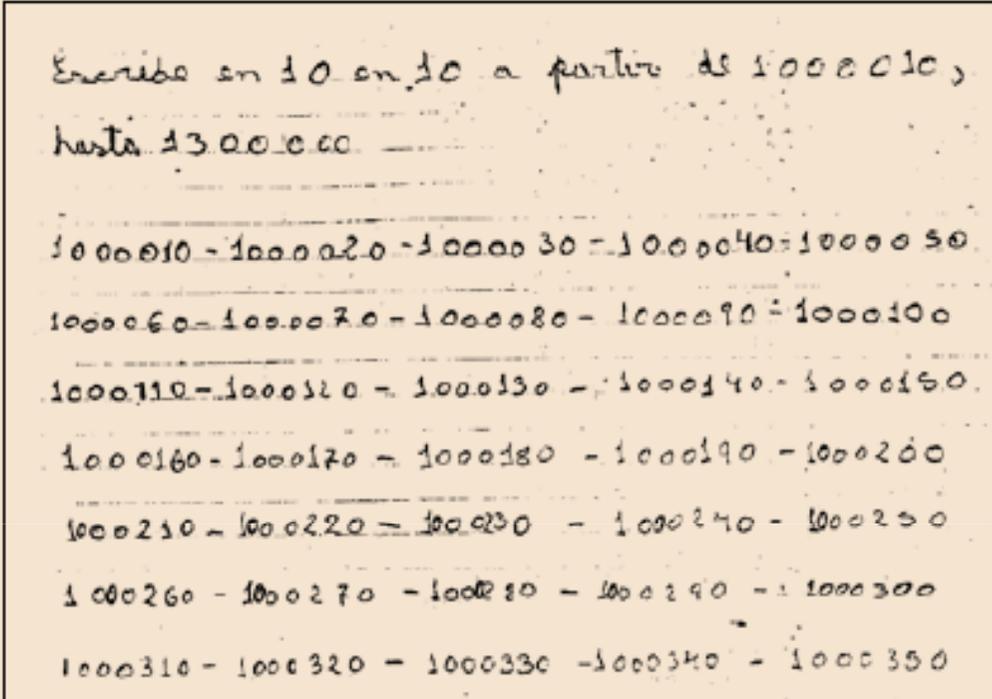


Resultados de algunos estudios (Cuglievan et al, 2006)

Trascripción: “Escribe en 10 en 10 a partir de 1 000 010, hasta 1 300 000”

“El resultado son treinta mil números. Este ejercicio no es difícil, mas bien es innecesariamente tedioso, y de baja demanda cognitiva. Esto refleja la concepción del área que maneja el docente, la cual está centrada en los contenidos matemáticos

... Este tipo de ejercicios demanda procesos mecánicos que el estudiante resuelve usando algoritmos. Por repetición se aprende información que puede ser útil, sin embargo en el caso de este ejercicio, ¿qué sentido tiene memorizar treinta mil números que van de diez en diez?” (Pág. 379)



Escribe en 10 en 10 a partir de 1000010, hasta 1300000

1000010 - 1000020 - 1000030 - 1000040 - 1000050
1000060 - 1000070 - 1000080 - 1000090 - 1000100
1000110 - 1000120 - 1000130 - 1000140 - 1000150
1000160 - 1000170 - 1000180 - 1000190 - 1000200
1000210 - 1000220 - 1000230 - 1000240 - 1000250
1000260 - 1000270 - 1000280 - 1000290 - 1000300
1000310 - 1000320 - 1000330 - 1000340 - 1000350

Resultados de algunos estudios (Cuglievan et al, 2006)

Posibles razones de la persistencia de una matemática “tradicional”:

-  La concepción instrumental acerca de la matemática, que subsiste entre los docentes y que se evidencia a partir de la reiterada práctica de procedimientos que le proponen a sus estudiantes.
-  La aún incipiente comprensión de lo que actualmente se entiende por problema (la persistencia de entender el problema como una situación de aplicación de un procedimiento).
-  La falta de cuestionamiento a su propia concepción de matemática que lo lleva a reproducir las formas de aprender que el docente usó durante su propia escolaridad, por sobre las propuestas didácticas que se proponen actualmente.
-  La concepción del aprendizaje como un proceso más bien repetitivo y pasivo, que debe seguir el estudiante (por sobre la actividad intelectual y la reflexión).

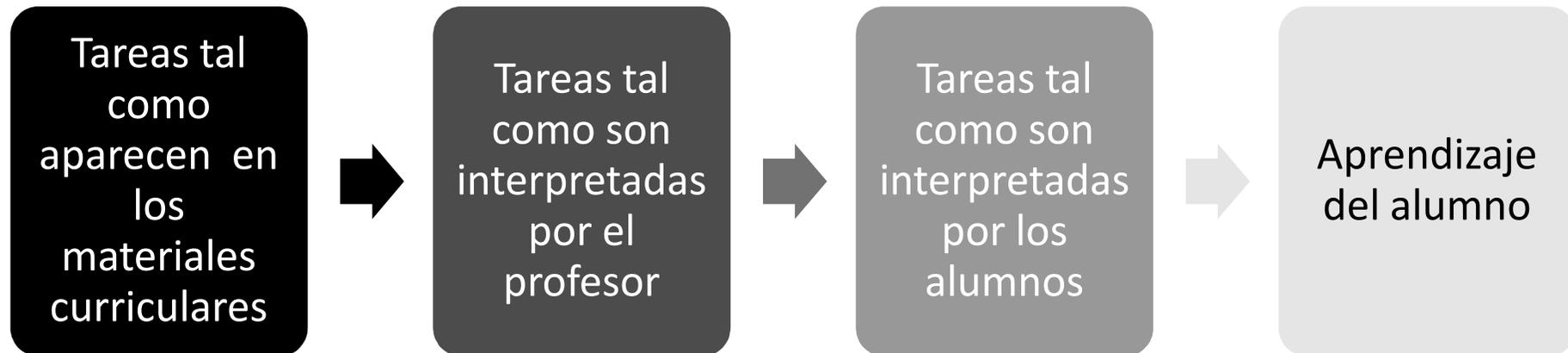
Inclusión de la Demanda Cognitiva



Se propone tener en cuenta la demanda cognitiva de las tareas que se proponen a los estudiantes.

- A los docente que enseñan el área de matemática (no solo de la especialidad).
- En los tres niveles de EBR: inicial, primaria y secundaria
- En los procesos de: planificación, implementación y evaluación del área de matemática.

Fases en las que se puede modificar la demanda cognitiva



Penalva, M. & Llenares, S. 2011

23

Con 3 litros de jugo ¿cuántas botellas de $\frac{1}{2}$ litro se pueden llenar?

Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos y dibujos necesarios para resolver el problema.

Botellas con jugo

Grado	Tercer grado de básica o primaria
-------	-----------------------------------

Acción o tarea a realizar	Resolver un problema que involucra el concepto de fracción
---------------------------	--

Respuesta correcta	6 botellas
--------------------	------------

Resultados SERCE

Porcentaje de respuestas correctas	13,93%
------------------------------------	--------

Porcentaje de respuestas parcialmente correctas	8,90%
---	-------

Porcentaje de respuestas incorrectas	61,41%
--------------------------------------	--------

Porcentaje de omisiones	15,76%
-------------------------	--------

Respuesta:

Pregunta del SERCE

BOTELLAS CON JUGO:



Con 3 litros de jugo ¿cuántas botellas de $\frac{1}{2}$ litro se pueden llenar?



Botellas con jugo



Con 3 litros de jugo ¿cuántas botellas de $\frac{1}{2}$ litro se pueden llenar?

Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos y dibujos necesarios para resolver el problema.

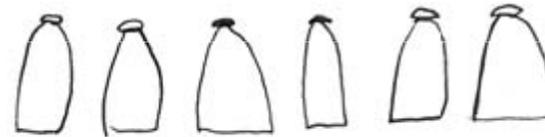


$$2 \cdot 3 = 6$$

Respuesta: Se pueden llenar 6 botellas de $\frac{1}{2}$ l.

Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos y dibujos necesarios para resolver el problema.

$$3 \times 2 = 6$$



Respuesta: Se pueden llenar 6 botellas.

Botellas con jugo



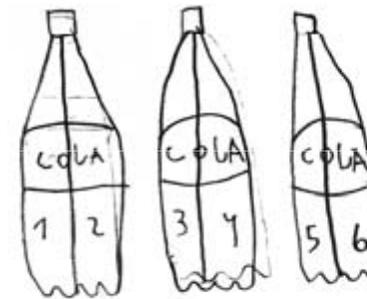
Con 3 litros de jugo ¿cuántas botellas de $\frac{1}{2}$ litro se pueden llenar?

Escribe dentro de este recuadro todas las cuentas y dibujos necesarios para resolver el problema.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

Respuesta: NECESITO 6 BOTELLAS DE $\frac{1}{2}$

Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos y dibujos necesarios para resolver el problema.



Entotal me quedo 6 de $\frac{1}{2}$

Respuesta:

Botellas con jugo



Con 3 litros de jugo ¿cuántas botellas de $\frac{1}{2}$ litro se pueden llenar?

Escribe dentro de este recuadro todos los cálculos y dibujos necesarios para resolver el problema.

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1 \\ 2 \\ + \\ \hline 6 \end{array}$$

Respuesta: son 6



ALGUNOS EJEMPLOS DE TAREAS

Tipos de tareas

Proposición de ejemplos



Definición: Un número oblongo, es aquel que es el producto de dos números consecutivos.
Escribe un ejemplo de un número oblongo, de tres cifras.

Problemas



Halla el área de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 13 cm y su perímetro, 30 cm.

Encuentra un número que tenga las siguientes características:



Tiene tres cifras



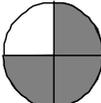
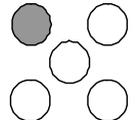
El dígito central es igual a la suma de los dígitos de las centenas y unidades



El dígito de las unidades es el doble del dígito de las centenas.

Tabla de múltiples representaciones

Completa la tabla de la izquierda para que las representaciones en cada fila sean equivalentes.

fracción	decimal	porcentaje	Grafica como parte de la unidad	Gráfica como parte de un conjunto
$\frac{1}{2}$				
	0,25			
		40%		
				
				
		80%		



El costo del vidrio para una ventana cuadrada es de S/. 12 por dm^2 y el del marco S/. 24 por dm. Halla una expresión que calcule es costo, dada la longitud del lado (en dm).

(Adaptado de: **Azcárate, C. Deulofeu, J.** *Funciones y Gráficas*. Editorial Síntesis. España. 1990)

Alguno ejemplos tomados del TIMSS*



Para el dominio cognitivo de Razonamiento, se presentan los siguientes ejemplos:

Ej. de octavo: Los primos gemelos son números primos que tienen un solo número entre ellos. Así, 5 y 7, 11 y 13, 17 y 19 son pares de primos gemelos. Haz una conjetura acerca de los números que hay entre primos gemelos.

**Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003 / Ina V.S. Mullis... [et al.]. — Madrid : Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, 2002. Pág. 44.*



Alguno ejemplos tomados del TIMSS*

Ej. de cuarto: Dos pintores usan dos latas de pintura para pintar una pared. Después tienen que usar la misma clase de pintura para pintar una pared que es el doble de larga y el doble de alta. Uno de los dice que necesitarán el doble de pintura para pintar la pared. Indica si el pintor tiene razón y aporta razones para respaldar tu respuesta.

**Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003 / Ina V.S. Mullis... [et al.]. — Madrid : Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, 2002. Pág. 44.*

Alguno ejemplos tomados del TIMSS*

Ej. de cuarto: En cierto país la gente escribe los números como sigue: 11 lo escriben $\diamond\diamond\bullet$, 42 es $\star\star\bullet\bullet$ y 26 es $\star\diamond\bullet$. ¿Cómo escriben 37?

Ej. de octavo: Demostrar que la suma de cualesquiera dos números impares es un número par.

**Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003 / Ina V.S. Mullis... [et al.]. — Madrid : Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, 2002. Pág. 45.*



La Demanda Cognitiva como Oportunidad de Aprendizaje en el Área de Matemática



Gustavo Cruz Ampuero
gcruz@colegiosperuanos.edu.pe